

Sequenza libera $\rightarrow (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \Leftrightarrow$

$$a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_n \bar{v}_n = \underline{0} \Rightarrow (a_1 \dots a_n) = (0 \dots 0).$$

Sequenza libera $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \Leftrightarrow$

$$\exists (a_1 \dots a_n) \in K^n, (a_1 \dots a_n) \neq (0 \dots 0):$$

$$a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n = \underline{0}$$

Seq. S è libera $\Leftrightarrow$ uno dei suoi vettori è c. lineare dei rimanenti.

$$\exists \bar{v}_i \in S: \bar{v}_i \in \mathcal{L}(S \setminus \{\bar{v}_i\}).$$

Dlm: m.b. $a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n = \underline{0}$ con $a_i \neq 0 \Rightarrow \exists a_i^{-1} \in K$

$$\text{e } a_2^{-1} (a_2 \bar{v}_2) = -a_1^{-1} (a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n)$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$(a_i^{-1} a_i) \bar{v}_2 = \bar{v}_2$$

□

Teorema: Sia $V(K)$ uno spazio vettoriale
(finitamente generato) diverso da $\{0\}$.
Allora $V(K)$ ammette almeno una seq.
libera di generatori. (metodo degli zeri successivi).

Def: Una sequenza libera di generatori di $V(K)$ è
detta base.

Dm: Sia $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ una seq. finita di generatori per
 $V(K)$.

$\rightarrow S = \emptyset?$ $\rightarrow$ sì: implicata $V(K) = L(\emptyset) = \{0\}$ e
 $S \neq \emptyset \rightarrow$ S libera? $\rightarrow$ sì $\Rightarrow$ S base. $\square$

$\hookrightarrow S$ libera $\Rightarrow \exists \bar{v}_i \in S: L(S \setminus \{\bar{v}_i\}) = L(S) = V(K)$

$\Rightarrow$ possiamo $S \leftarrow S \setminus \{\bar{v}_i\}$

proviamo all'inizio

$\mathbb{R}^4$

$$W = \{ (1111), (0111), (1000), (0011), (1100) \}.$$

$$S = ((1111), (0111), (1000), (0011), (1100))$$

$S \neq \emptyset$. S linear?

$$(1111) - (0111) - (1000) = \emptyset$$

$$(1000) = (1111) - (0111) \Rightarrow \text{SECRET} (1000)$$

$$S = ((1111), (0111), (0011), (1100))$$

$$\text{linear? } (1100) = (1111) - (0011)$$

$$S = ((1111), (0111), (0011))$$

$$\text{linear? } \alpha(1111) + \beta(0111) + \gamma(0011) = (0000)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \alpha + \beta = 0 \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \text{UNTERA}$$

$$((1111), (0111), (0011)) \text{ BASE DI } W.$$

055. Una sequenza di generatori legale

Non è mai minimale

(cioè contiene sempre una seq. più corta di generatori).

• Una seq. di generatori libera è sempre minimale.

Sia $S = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n\}$ una seq. libera di vettori

$$\Rightarrow \forall \bar{s}_i \in S : L(S \setminus \{\bar{s}_i\}) \neq L(S)$$

In particolare $\bar{s}_i \notin L(S \setminus \{\bar{s}_i\})$.

Se S libera e di generatori $\Rightarrow$ Non si può
rimuovere alcun elemento da S ed avere ancora
una seq. di generatori.

oss: Una sequenza $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ è una BASE di $V(K)$ se e solamente se ogni vettore di $V(K)$ si scrive in modo unico come c.l. di questi elementi di S .

$$S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n) \text{ base} \Leftrightarrow \forall \bar{v} \in V(K) \exists! (a_1 \dots a_n) \in K^n: \\ \bar{v} = a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n.$$

Dim: Sia S base $\Rightarrow S$ è di generatori $\Rightarrow$ ogni vettore di $V(K)$ si scrive come c.l. di vettori di S .

$$\forall \bar{v} \in V(K) \exists (a_1 \dots a_n) \in K^n: \bar{v} = a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n.$$

$$\text{Supponiamo } \exists (b_1 \dots b_n) \neq (a_1 \dots a_n): \bar{v} = b_1 \bar{v}_1 + \dots + b_n \bar{v}_n$$

$$\Rightarrow \underline{0} = \bar{v} - \bar{v} = (a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n) - (b_1 \bar{v}_1 + \dots + b_n \bar{v}_n) =$$

$$= (\alpha_1 - \beta_1) \bar{v}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \bar{v}_n.$$

poiché S libera, deve essere $\alpha_1 - \beta_1 = 0 \dots \alpha_n - \beta_n = 0$
cioè $\alpha_1 = \beta_1 \dots \alpha_n = \beta_n$. $\square$

Viceversa: Se $\forall v \in V \exists! (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n: v = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$

$\Rightarrow$ anche $0 = 0 \cdot \bar{v}_1 + \dots + 0 \cdot \bar{v}_n$
si scrive in modo unico. $\Rightarrow S$ libera.

poiché ogni vettore di $V(\mathbb{K})$ è c. lineare
di vettori di $S \Rightarrow \mathcal{L}(S) = V(\mathbb{K}) \Rightarrow S$ di generatori.

$\Rightarrow S$ base

$\square$

Sia $V(\mathbb{K})$ uno sp. vettoriale $B = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ una
sua base. $\forall \bar{v} \in V$ si dicono componenti di $\bar{v}$
rispetto a B gli scalari $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n.$$

$$\Phi_{\mathcal{O}} \left\{ v(k) \rightarrow k^n \right. \\ \left. \bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n \rightarrow (\alpha_1 \dots \alpha_n) \right.$$

La funzione $\Phi_{\mathcal{O}}$ è un isomorfismo di
spazi vettoriali (N.B. dipende da $\mathcal{O}$).

$$\forall \bar{u} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n, \quad \bar{w} = \beta_1 \bar{v}_1 + \dots + \beta_n \bar{v}_n, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}$$

$$\Phi_{\mathcal{O}}(a\bar{u} + b\bar{w}) = \Phi_{\mathcal{O}}(\alpha_1 \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_1 \alpha_n \bar{v}_n + b\beta_1 \bar{v}_1 + \dots + b\beta_n \bar{v}_n) =$$

$$= \Phi_{\mathcal{O}}((\alpha_1 \alpha_1 + b\beta_1) \bar{v}_1 + \dots + (\alpha_1 \alpha_n + b\beta_n) \bar{v}_n) =$$

$$\Phi_{\mathcal{O}}((\alpha_1 \alpha_1 + b\beta_1) \bar{v}_1 + \dots + (\alpha_1 \alpha_n + b\beta_n) \bar{v}_n) =$$

$$= \alpha_1 (\alpha_1 \dots \alpha_n) + b (\beta_1 \dots \beta_n) = \alpha_1 \Phi(\bar{u}) + b \Phi(\bar{w})$$

□

Φ_0 è lineare.

è intuitiva per il leorema dimostrato che
ogni vettore ammette un'unica rapp. in
componenti rispetto a $\mathcal{B}$.

è verificata perché $\forall (a_1 \dots a_n) \in K :$

$$\Phi_0(a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_n \bar{v}_n) = (a_1 \dots a_n)$$

□

Sia $M := \{(a, b, a^2 + b^2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

con l'operazione di somma data da

$$(a, b, a^2 + b^2) + (x, y, x^2 + y^2) := (a+x, b+y, (a+x)^2 + (b+y)^2)$$

~~MA~~

$$\alpha \cdot (a, b, a^2 + b^2) = (\alpha a, \alpha b, \alpha^2(a^2 + b^2))$$

$$U \neq \mathbb{R}^3$$

U è uno sp. vettoriale su $\mathbb{R}$ ed ammette come base $(101), (011)$

$$1 \hat{=} (a, b, a^2 + b^2) = (a, b, a^2 + b^2):$$

$$(a+b) \hat{=} (a, b, a^2 + b^2) = ((a+b)a, (a+b)b, (a+b)^2(a^2 + b^2)) =$$

$$= (a^2, a^2b, a^2a^2 + a^2b^2) \hat{=} (a^2, a^2b, a^4 + a^2b^2)$$

$$= a \hat{=} (a, b, a^2 + b^2) \hat{=} b \hat{=} (a, b, a^2 + b^2).$$

primamente e altre.

$$(x, y, x^2 + y^2) = a_1 \hat{=} (101) + \cancel{a_2} a_2 \hat{=} (011)$$

$$U \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, x^2 + y^2) \longrightarrow (x, y)$$

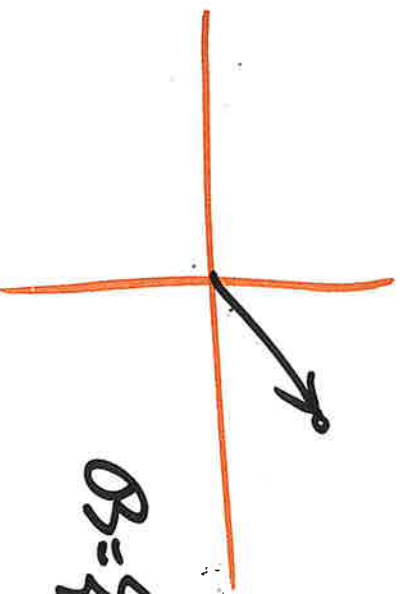
$$W = \{ (1, a, 2) : a \in \mathbb{R} \}.$$

$$(1 \oplus a \cdot 2) + (1 \oplus b \cdot 2) := (1 \oplus (a+b) \cdot 2)$$

$$a \cdot (1 \oplus 2) = (1, a \oplus 2)$$

$$W \rightarrow \mathbb{R}$$

ATTENZIONE A COME SONO DEFINITE LE OPERAZIONI



$$B = \{ \rightarrow, \uparrow \}.$$

$$\rightarrow \mathbb{R}^2$$

$V(K)$

$\Phi_B: V \rightarrow K^n$ isom.

$B \quad |B| = n$

$B' \quad |B'| = m \quad \Phi_{B'}: V \rightarrow K^m$ isom.

È possibile $m \neq n$? Se fosse $m \neq n \Rightarrow$

$$K^m \cong K^n$$

in particolare K^2 non è

seq. lineare di 3 vettori e

K^3 è seq. lineare di 3 vettori!

DEVE ESSERE $m = n$

In generale una sequenza libera è "piccola"
 una sequenza di generatori è "grande".

| Sia $S = (\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ libera, $S' \subseteq S \Rightarrow S'$ è libera ($S' \neq \emptyset$). |

[Se fosse S' libera $\Rightarrow \exists$ c. lineare a coeff. non tutti $= 0$ di vettori di S' che dà $0 \Rightarrow$ la c. lineare di vettori di S che otteniamo aggiungendo a questi i rimanenti vettori di S, S' con coeff. $= 0$ è a coeff. non tutti $= 0$ e dà 0 perché S libera].

| Sia S di generatori e $S \subseteq S' \Rightarrow S'$ è di generatori. |

[~~ma~~ S di qua. $\Rightarrow \forall v \in V: \bar{v} \in L(S)$ e in particolare

$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n \quad \text{e } S = (\bar{s}_1 \dots \bar{s}_n). \quad \bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n + 0 \sum_{i \in S', S} \bar{s}_i$$

$$\Rightarrow \bar{v} \in L(S')]$$

Lemma (di Steinitz). Sia $V(K)$ uno sp. vettoriale finitamente generato e siano $A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$ una seq. libera di m vettori e $B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$ una sequenza di n vettori $\Rightarrow \underline{m \leq n}$.

COROLLARIO:

[Siano B_2 e B_1 due basi di $V(K) \Rightarrow |B_2| = |B_1|$ ($V(K)$ f. s.).]

DIM

B_2 libera

& B_2 di gen $\Rightarrow |B_1| \leq |B_2|$

B_1 di gen.

& B_1 libera $\Rightarrow |B_2| \leq |B_1|$

$\Rightarrow |B_1| = |B_2|$

□

Def: Sia $V(K)$ uno s.vettoriale.

Se $V(K) \neq \{0\} \Rightarrow$ possiamo definire la dim di $V(K)$

$\dim V = 0$

Se $V(K) \neq \{0\} \Rightarrow$ la dimensione di $V(K)$ è la cardinalità di una sua qualsiasi

base.

$$\dim V(K) = n$$

$\exists$ base di $V(K)$ con $|B| = n$

CONSEGUENZA: Sia $V(K)$ f. gen. $\dim V(K) = n$
 $\Rightarrow V(K) \cong K^n$

A meno di isomorfismo uno spazio vettoriale
finitamente generato è univocamente determinato
dal campo K e dalla dimensione.

A libera $A = (\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m)$

B di generatori $B = (\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n)$

$I: m \leq n$.

$\dim(\text{di Steinitz})$ per assurdo.

• Supponiamo $m > n$.

$$\bar{a}_1 \in A \quad \bar{a}_1 \in V(K) \in \mathcal{L}(B)$$

$$\Rightarrow \exists (\beta_{11} \dots \beta_{1n}) \in K^n: \bar{a}_1 = \beta_{11} \bar{b}_1 + \dots + \beta_{1n} \bar{b}_n$$

Osserviamo che $\bar{a}_1 \neq 0$; altrimenti $1 \cdot 0 = 0$
ed A non sarebbe libera.

$$\text{WLOG } \beta_{11} \neq 0 \Rightarrow \bar{b}_1 = \bar{a}_1 - \beta_{11}^{-1} (\bar{a}_1 - \beta_{11} \bar{b}_1 - \dots - \beta_{1n} \bar{b}_n)$$

$$\Rightarrow \bar{b}_1 \in \mathcal{L}(B_1) \quad \text{ove } B_1 = (\bar{a}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$$

$$\bar{b}_1 \in \mathcal{L}(B_1) \Rightarrow \mathcal{L}(B_1) = \mathcal{L}(B_1, \{ \bar{b}_i \}) = V(k)$$

$\Rightarrow B_1$ è di generatori.

$$A = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$B_1 = (\bar{a}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n)$$

$$\bar{a}_1 \in \mathcal{L}(B_1) \Rightarrow \bar{a}_1 = \alpha_{21} \bar{a}_2 + \beta_{21} \bar{b}_2 + \dots + \beta_{2n} \bar{b}_n$$

ne poniamo tutti: $\beta_{2i} = 0 \Rightarrow \bar{a}_1 = \alpha_{21} \bar{a}_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\alpha_{21} \bar{a}_2 + \bar{a}_1 = 0 \Rightarrow \psi$$

$$\text{WLOG } \beta_{22} \neq 0 \Rightarrow \bar{b}_2 \in \mathcal{L}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n)$$

$$\Rightarrow B_2 = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n) \text{ di generatori.}$$

$$A = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n \dots \bar{a}_m) \quad \text{Libera}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= (\bar{b}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n) \\ B_2 &= (\bar{a}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_n) \\ B_3 &= (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{b}_n) \\ &\vdots \\ B_n &= (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n) \end{aligned}$$

Tutte di generatrici.

$$\bar{a}_m \in \mathcal{L}(B_n) \quad \text{ma} \quad B_n \subseteq A \Rightarrow \bar{a}_m \notin B_n$$

$$\bar{a}_m = \gamma_1 \bar{a}_1 + \dots + \gamma_n \bar{a}_n \Rightarrow \bar{a}_m \text{ è}$$

combinazione di vettori di A diversi da lui stesso

$\Rightarrow A$ è libera $\square \Rightarrow$ segue che $m \leq n$ $\square$